Métodos Numéricos
24 de abril de 2017
Primer Parcial

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

☐ Resolver ejercicios en hojas separadas
☐ Completar nombre en las hojas
☐ Completar LU y nombre en el enunciado
☐ **Justificar todas las respuestas**

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Nota
23	15	24	16	78 (A)

1. Sea $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{V}$ un conjunto de vectores no nulos en un espacio vectorial $\mathbb{V}$.

   (a) Sea $w \in \mathbb{V}$. Probar que si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente pero $\{v_1, \dots, v_n, w\}$ es linealmente dependiente, entonces w es combinación lineal de $\{v_1, \dots, v_n\}$. (10 puntos)

   (b) Probar que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente dependiente si y sólo si $\exists k \in \mathbb{N}, 1 < k \leq n$ tal que v_k es combinación lineal de $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ (es decir, es combinación lineal de los vectores que le preceden). (13 puntos)

2. Sea $n \geq 2$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz definida como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \geq j \ \wedge \ j \neq n \\ i & \text{si } j = n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   (a) Demostrar que A tiene factorización LU. (13 puntos)

   (b) Siendo L y U las matrices de la factorización LU de A del item anterior, probar (12 puntos):

      i. $\|A\|_M = \|L\|_1 = \|U\|_1$

      ii. $\|A\|_2 \leq \sqrt{2n}\ \|L\|_2$

   ¿Se cumple la propiedad submultiplicativa, es decir, $\|A\|_M \leq \|L\|_M \|U\|_M$?

3. Sea $n \in \mathbb{N}_{>1}$, $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $a_{ij} = \max\{i, j\}$ y sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica y no singular.

   (a) Probar que A_2 no es definida positiva. ¿Existe algún $n > 1$ tal que A_n sea definida positiva? (8 puntos)

   (b) Probar que B^{2k} es simétrica definida positiva para todo $k \in \mathbb{N}$. (8 puntos)

   (c) Probar que $\begin{pmatrix} B^4 & A_n \\ A_n^t & B^4 + A_n^t B^{-4} A_n \end{pmatrix}$ es simétrica definida positiva. (12 puntos)

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ de rango máximo y sea a_i la i-ésima columna de A, es decir, $A = [a_1, a_2]$. Sean $q_1 = a_1$ y $q_2 = a_2 - \lambda a_1$, con $\lambda = \frac{a_1^t a_2}{\|a_1\|_2^2}$.

   (a) Probar que $Q = \left[\frac{q_1}{\|q_1\|_2}, \frac{q_2}{\|q_2\|_2}\right]$ es una matriz ortogonal. (8 puntos)

   (b) Hallar R (con diagonal positiva) en función de a_1 y a_2, tal que $A = QR$ sea una factorización QR de A. (10 puntos)

   (c) Indique la opción correcta, justificando su respuesta. (6 puntos)
   'Si hubiera utilizado el método de triangulación por rotaciones de Givens para hallar una factorización QR de A (R con diagonal positiva)...

      i. ...habría obtenido la misma factorización del ítem anterior.'

      ii. ...habría obtenido una factorización distinta.'

      iii. ...no siempre puede utilizarse Givens para esta matriz.'

① $\{v_1 \dots v_n\} \subseteq \mathbb{V}$ no nulos.

a) • $\{v_1; \dots; v_n\}$ l.i.

• $\{v_1; \dots; v_n; w\}$ l.d.

Como $\{v_1 \dots v_n, w\}$ es l.d., luego puede escribirse:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta . w = 0$$

con al menos un α_i ó β no nulos. Como $\{v_1; \dots; v_n\}$ es l.i., β no puede ser cero; pues de serlo, para formar al vector nulo debería cumplirse $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, y nosotros estamos suponiendo que alguno de todos estos coef. es no nulo. Si $\beta \neq 0$, luego:

$$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = -\beta w$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{\beta}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = w$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{-\alpha_1}{\beta} v_1 + \dots + \left(\frac{-\alpha_n}{\beta}\right) v_n = w}$$

Esto es, w es una combinación lineal de $\{v_1; \dots; v_n\}$.
Quod erat demonstrandum.

B

b)

$\Rightarrow$) Sé que $\{v_1; \dots; v_n\}$ es l.d. Luego $\exists\, \alpha_1 \dots \alpha_n$ <u>no todos nulos</u> /

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

Sea $K \in \mathbb{N}$ el mayor número $1 < K \leq n$ que cumpla que:

- $\alpha_K \neq 0$
- $\forall i \in \mathbb{N},\ K < i \leq n \Rightarrow \alpha_i = 0$

Es decir, el "último" coeficiente no nulo contando de α_1 a α_n. Nótese que siempre existe porque hay al menos dos no nulos (hay al menos uno por hipótesis al plantear la comb. lineal, pero no puede ser único pues $v_i \neq 0\ \forall i$).

$$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{K-1} v_{K-1} + \alpha_K \cdot v_K = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{K-1} \cdot v_{K-1} = -\alpha_K v_K$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{-\alpha_1}{\alpha_K} v_1 + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_{K-1}} \cdot v_{K-1} = v_K}$$

Luego, v_K puede escribirse como comb. lineal de $\{v_1 \dots v_{K-1}\}$. B

$\Leftarrow$) Sea ésta la comb. lineal de $\{v_1 \dots v_{K-1}\}$ que se supone que existe:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{K-1} \cdot v_{K-1} = v_K$$

Nótese que $\alpha_1 \dots \alpha_{K-1}$ no pueden ser todos nulos, pues $v_K \neq 0$.

24/04/17

Luego se puede escribir:

$$\alpha_1 . v_1 + \ldots + \alpha_{K-1} . v_{K-1} - v_K = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha_1 . v_1 + \ldots + \alpha_{K-1} . v_{K-1} - 1 . v_K + 0 . v_{K+1} + \ldots + 0 . v_n = 0}$$

Esto es una combinación lineal de $\{v_1; \ldots; v_n\}$ de coeficiente no todos nulos que da como resultado el vector nulo. Es decir, $\{v_1; \ldots; v_n\}$ es l.d. ✓

B

Quod erat demonstrandum.

24/04/17

(2) a) Sabemos que una matriz tiene factorización LU $\Leftrightarrow$ se puede aplicar el algoritmo de eliminación gaussiana sin permutaciones. Veamos que efectivamente es posible aplicarlo.
La matriz A tiene una forma como:

$$A_n = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \cdots & 0 & 3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \cdots & 1 & n \end{bmatrix}$$

- Si $n=2$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

tiene factorización LU.

- Si $n>2$, apliquemos un primer paso del algoritmo de Gauss y veamos (que puede hacerse porque $a_{11} \neq 0$)

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & & 2 \\ \vdots & \vdots & & \cdot & \vdots \\ & & & 1 & \\ 1 & 1 & \cdots & \cdot & n \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \leftarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3 - F_1 \\ \vdots \\ F_n \leftarrow F_n - F_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & 1 & 1 & 0 \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & n-1 \end{bmatrix} = A_n^{(1)}$$

Una vez hecho el primer paso de Gauss, la submatriz con la que trabajará el algoritmo en el siguiente paso (marcada en azul), vemos que tiene una forma similar

"a la original: la submatriz que resulta es A_{n-1}. ✓
Si $n-1>2$, sabemos que se podrá aplicar el primer (en realidad el segundo) paso del algoritmo. Si $n-1=2$, se demostró que A_{n-1} tiene LU ($\Leftrightarrow$ se le puede hacer Gauss).

Inductivamente, como en cada paso la matriz se reduce a algo de igual forma, probamos que a A se le puede aplicar el algoritmo de Gauss (sin pivoteo) $\Leftrightarrow$ A tiene LU. ✓ Inductivamente, podrías asumir que $A_{n-1} = \tilde{L}\tilde{U}$ y construir la fact. LU de A_n...

Quod erat demostrandum.

b) Notemos que por lo visto en "a", como en cada paso de Gauss (incluyendo el último) se resta la fila de arriba a todas las demás una vez, la fac. LU será:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ \vdots & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}}_{U}$$ ✓

i) Por la definición de A, $\|A\|_M$ será trivialmente "n" (ver esquema al dorso). Luego lo que pruebo ya es si:

- $\|A\|_M = n = \|L\|_1 = \|U\|_1$

Recordemos que:

$$\|L\|_1 = \max_{x:\|x\|_1=1} \|Lx\|_1 \quad y \quad \|U\|_1 = \max_{x:\|x\|_1=1} \|Ux\|_1$$

Las normas $\|Lx\|_1$ y $\|Ux\|_1$ serán la suma de los módulos de las coord. de Lx y Ux respect.
Si queremos maximizar la norma, debemos maximizar la suma de los elementos de Lx y Ux respect. en módulo, $\forall \|x\|_1=1$

Justificar

Cada elemento $(Lx)_i$ y $(Ux)_j$ no podrá ser mayor a 1 en nuestra expresión a maximizar, pues $\|x\|_1 = 1$ y L, U solo tienen 1 y 0 como elementos.
Luego, el caso máximo para $\|Lx\|_1$ y $\|Ux\|_1$ será aquel en el que, si es posible, $(Lx)_i = (Ux)_j = 1 \ \forall i,j$ (todas las coord. sean 1).
Este caso es posible con $x_L = (1;0;\dots;0)$ para L, y $x_U = (0;\dots;0;1)$ para U. Y en ambos casos $Lx_L = Ux_U = (1;\dots;1) \Rightarrow \|Lx_L\|_1 = \|Ux_U\| = n$.
Si esta es la norma máxima de Lx y Ux con $\|x\|_1 = 1$, luego $\|L\|_1 = \|U\|_1 = n$. ✓

B =

Quod erat demonstrandum.

ii) $\|A\|_2 = \|LU\|_2 \leq \|L\|_2 \cdot \|U\|_2 = \|U\|_2 \cdot \|L\|_2 \leq \sqrt{2\|U\|_1} \cdot \|L\|_2$

$= \sqrt{2n} \cdot \|L\|_2$ ✓

¿porqué $\|U\|_2 \leq \sqrt{2\|U\|_1}$? no justifico

Quod erat demonstrandum.

Sí, se cumple que $\|A\|_M = n \leq \|L\|_M \cdot \|U\|_M = 1 \cdot 1 = 1$ ✓ X

pero $n \geq 2$ por enunciado...

NO SE CUMPLE

5/8

24/04/17

③ a) $$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Como $\det(A_2) = 2-4=-2<0 \Rightarrow A_2$ no es def. positiva.

Como cualquier A_n tendrá como submatriz de orden 2×2 a A_2 (por la definición de A_n), luego tendrá un menor principal ~~[illegible]~~ negativo $\Rightarrow A_n$ no es definida positiva.

(Recordemos que A es def. positiva $\Leftrightarrow$ todas sus submatrices y ella misma tienen determinante mayor a cero).

b) Se sabe que B es simétrica, por lo tanto B^{2K} es simétrica (visto en práctica). Ahora veamos que es def. pos. El ej pedía probar esto

B^{2K} es d.p. $\Leftrightarrow \forall x, x \neq 0 \Rightarrow x^t B^{2K} x > 0$. Sea $x \neq 0$:

- $x^t . B^{2K} . x = x^t . B^K . B^K . x = x^t . (B^t)^K . B^K . x$
  $= x^t . (B^K)^t . B^K . x = (B^K x)^t . B^K x = \|B^K x\|_2^2$

Y como $x \neq 0$ y B^K es inversible (pues B lo es), luego $B^K x \neq 0 \Rightarrow \|B^K x\| > 0$.

Luego, B^{2K} es simétrica definida positiva.

Quod erat demonstrandum.

c) Se sabe que una matriz es s.d.p. $\Leftrightarrow$ tiene factorización de Cholesky. Para probar que nuestra matriz es s.d.p. probaré que tiene dicha factorización. La propondré de una manera genérica y buscaré darle una solución:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} B^4 & A_n \\ \hline A_n^t & B^4 + A_n^t \cdot B^{-4} \cdot A_n \end{array}\right]}_{M} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} L_{11} & 0 \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array}\right]}_{L} \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} L_{11}^t & L_{21}^t \\ \hline 0 & L_{22}^t \end{array}\right]}_{L^t}$$

Notemos que los bloques cuadrados L_{11} y L_{22} son, al igual que L, triangulares inferiores y de elementos posit. en la diagonal (es decir, son también matrices con forma de "Cholesky"). Veamos si tiene solución:

(i) $B^4 = L_{11} \cdot L_{11}^t$
(ii) $A_n = L_{11} \cdot L_{21}^t$
(iii) $A_n^t = L_{21} \cdot L_{11}^t$
(iv) $B^4 + A_n^t \cdot B^{-4} \cdot A_n = L_{21} \cdot L_{21}^t + L_{22} \cdot L_{22}^t$

(i) Tiene solución pues se probó en "b" que B^{2K} es s.d.p. ($\Leftrightarrow$ tiene Cholesky), y $L_{11} \cdot L_{11}^t$ es una factorización de Cholesky.

(ii) Dadas A_n y L_{11}, se puede hallar L_{21}^t siempre porque A es inversible (ver final del ejercicio) (en realidad es porque L_{11} es invertible)

(iii) $A_n^t = L_{21} \cdot L_{11}^t \Leftrightarrow A_n = (L_{21} \cdot L_{11}^t)^t = L_{11} \cdot L_{21}^t$ ✓ Es consistente.

$A_n = L_{11} L_{21}^T \Leftrightarrow I = \underbrace{A_n^{-1} L_{11}}_{\text{necesitás que esto sea invertible}} L_{21}^T$ ¿cómo despejás L_{21} usando A_n^{-1}?

24/04/17

(iv) $B^4 + A_n^t B^{-4} . A_n = L_{21} . L_{21}^t + L_{22} . L_{22}^t$

$= L_{11} . L_{11}^t + L_{21} . L_{11}^t . (L_{11} . L_{11}^t)^{-1} . L_{11} . L_{21}^t = L_{21} . L_{21}^t + L_{22} . L_{22}^t$

$= L_{11} . L_{11}^t + L_{21} . \cancel{L_{11}^t . (L_{11}^t)^{-1}} . \cancel{L_{11}^{-1}} . L_{11} . L_{21}^t = L_{21} . L_{21}^t + L_{22} . L_{22}^t$

$= L_{11} . L_{11}^t + L_{21} . L_{21}^t = L_{21} . L_{21}^t + L_{22} . L_{22}^t$

$\Leftrightarrow L_{11} . L_{11}^t = L_{22} . L_{22}^t$

Como $L_{22} . L_{22}^t$ es una fac. de Chol., es única y, además $L_{11} = L_{22}$: tiene solución. ✓

Como se puede hallar L / $M = LL^t$, M es s d p. ✓

Prueba de que A_n es inversible :

A es inversible $\Leftrightarrow \dim(Nu(A)) = 0 \Leftrightarrow \dim(Im(A)) = n$.

- $Im(A) = \langle Ae_1 ; Ae_2 ; \dots ; Ae_n \rangle$

$= \langle col_1(A) ; col_2(A) ; \dots ; col_n(A) \rangle$

$= \langle (1;2;\dots;n) ; (2;2;3;\dots;n) ; (3;3;3;4;5;\dots;n) ; \dots ; (n;n;n;\dots;n) \rangle$

Si a cada columna se le resta la anterior se obtiene

$Col_i(A) = (1;1;1;\dots \underset{\substack{\uparrow \\ pos.(i-1)}}{1} ;0;0;\dots;0)$, (con $i>1$).

Si ahora se resta a la nueva $col_i(A)$ la anterior nueva, se obtiene el canónico $col_i(A) = e_{i-1}$. Como obtuvimos todos los canónicos de 1 a $n-1$, y dichos canónicos no ~~...~~ pueden formar $col_1(A) = (1;2;\dots;n)$, luego todas

las columnas de A son l.i. $\Rightarrow$ A es invertible.

24/04/17

(4) a) Para ver que Q es ortogonal, puedo verificar que sus columnas son ortogonales entre sí, y cada una tiene norma dos igual a 1.
Que la norma de cada columna sea 1 es trivial, pues son vectores no nulos normalizados. Para ver que son ortogonales, es equivalente ver que q_1 y q_2 lo son, pues tienen la misma dirección. Serán ortogonales $\Leftrightarrow \langle q_1, q_2 \rangle = q_1^t \cdot q_2 = 0$.

- $$q_1^t \cdot q_2 = a_1^t \left(a_2 - \frac{a_1^t \cdot a_2}{\|a_1\|_2^2} \cdot a_1\right) = a_1^t a_2 - a_1^t \cdot a_1 \cdot \frac{a_1^t \cdot a_2}{\|a_1\|_2^2}$$

$$= a_1^t a_2 - \cancel{\|a_1\|_2^2} \cdot \frac{a_1^t \cdot a_2}{\cancel{\|a_1\|_2^2}} = a_1^t \cdot a_2 - a_1^t \cdot a_2 = 0 \quad \checkmark$$

Quod erat demonstrandum.

b) Quiero que $A = Q.R$. Como Q es ortogonal, $Q^{-1} = Q^t$. $\Rightarrow Q^t A = R$. Con esto hallaré R.

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} — \frac{q_1^t}{\|q_1\|} — \\ — \frac{q_2^t}{\|q_2\|} — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | \\ a_1 & a_2 \\ | & | \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ • $r_{11} = \frac{1}{\|q_1\|} q_1^t \cdot a_1 = a_1^t \cdot a_1 \cdot \frac{1}{\|a_1\|} = \frac{\|a_1\|^2}{\|a_1\|} = \boxed{\|a_1\|} = r_{11}$

• $r_{12} = \frac{1}{\|q_1\|} q_1^t \cdot a_2 = \boxed{\frac{a_1^t \cdot a_2}{\|a_1\|}} = r_{12}$

- $r_{21} = \frac{1}{\|q_2\|} \cdot q_2^t \cdot a_1 = \frac{1}{\|q_2\|}\left(a_2^t - \frac{a_1^t a_2}{\|a_1\|^2} \cdot a_1^t\right) \cdot a_1$

$$= \frac{1}{\|q_2\|}\left(a_2^t a_1 - \frac{a_1^t a_2}{\cancel{\|a_1\|^2}} \cdot \cancel{\|a_1\|^2}\right) = \frac{1}{\|q_2\|}\left(a_2^t \cdot a_1 - a_1^t \cdot a_2\right)$$

$$= \frac{1}{\|q_2\|}\left(a_2^t \cdot a_1 - a_2^t \cdot a_1\right) = \frac{1}{\|q_2\|} \cdot 0 = \boxed{0} = r_{21}$$

- $r_{22} = \frac{1}{\|q_2\|} q_2^t \cdot a_2 = \frac{1}{\|q_2\|}\left(a_2^t - \frac{a_1^t a_2}{\|a_1\|^2} \cdot a_1^t\right) a_2$

$$= \frac{1}{\|q_2\|}\left(a_2^t a_2 - \frac{a_1^t a_2}{\|a_1\|^2}\, a_1^t a_2\right) = \frac{1}{\|q_2\|} \cdot \left(\|a_2\|^2 - \frac{(a_1^t a_2)^2}{\|a_1\|^2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{\left\| a_2 - \frac{a_1^t a_2}{\|a_1\|^2} a_1 \right\|} \cdot \left[\|a_2\|^2 - \frac{(a_1^t a_2)^2}{\|a_1\|^2} \right]} = r_{22}$$

Nótese que $r_{21}=0$, por lo que efectivamente R es t.s. Además, r_{11} es positivo trivialmente (es la norma de un vector que no puede ser cero pues es una columna de A, que tiene rango máximo).

Veamos que la diagonal completa es de elementos mayores a cero (falta r_{22}). Se sabe que existe la fact. QR con R diagonal de eltos positivos. Podemos asegurar que es la hallada, porque si no lo fuera, ello implicaría que no existe, llegando a un absurdo.

Esto es así porque al ser Q ortogonal, la columna 1 de R tiene la misma norma que A, por lo que $|r_{11}| = \|a_1\|$.

¡Ya sabías esto!

Una vez fijado $r_{11} = + \|a_1\|$ y no $r_{11} = - \|a_1\|$, se despeja r_{22}. [Si fuera negativo, no existiría una QR con $r_{ii} > 0$ (ABSURDO)] → Esto está mal

→ ¿De dónde se despeja?

c) La correcta es la opción (i).

Como ya se dijo antes, si en la fact. $A = QR$ la R tiene los elts. de la diagonal positivos, la factorización es única. Por cualquier método usado se concluye en la misma factorización (si se busca que $r_{ii} > 0$). Falta una hipótesis.